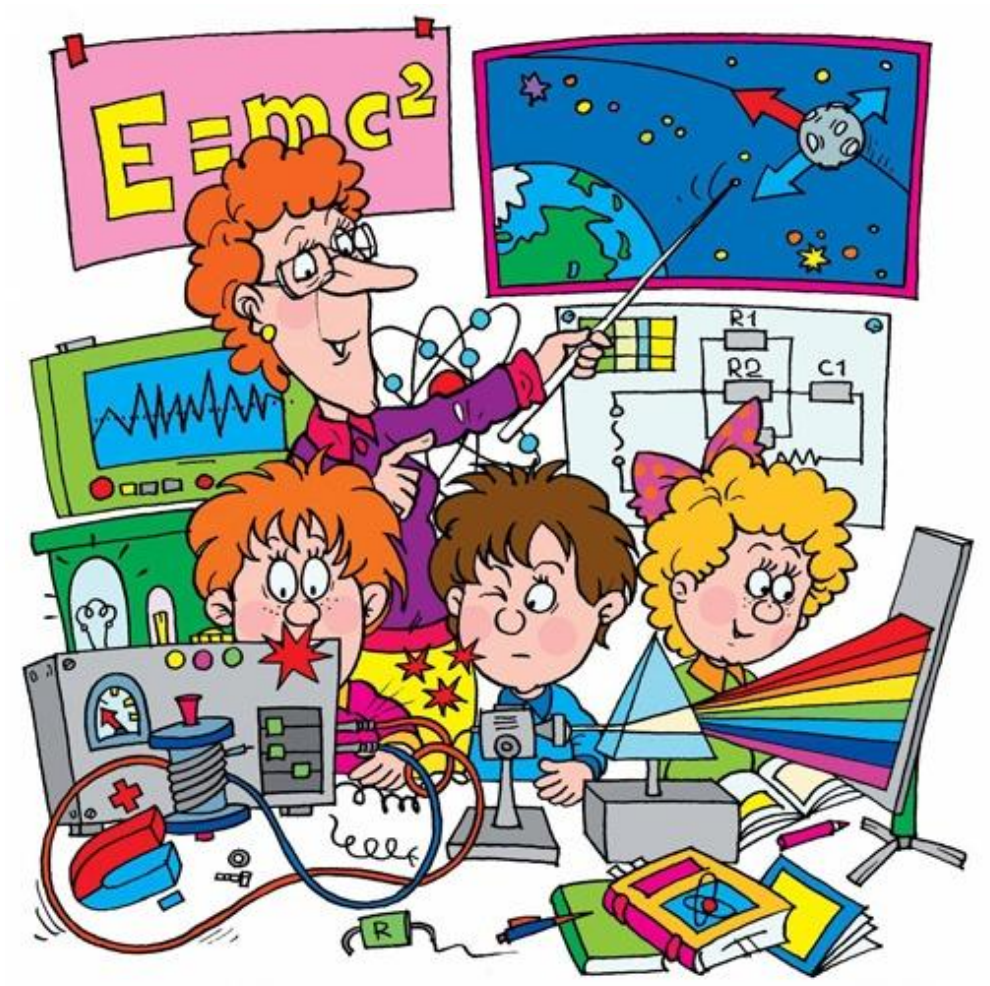
Плетнёв А.Э.
Гусев С.В.
Сугакевич А.Г.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА



методическое пособие для учащихся

Могилёв
2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ТУРА?

Решение экспериментальных задач – это испытание для тех, кто работает не только головой, но и руками. Поэтому при подготовке к олимпиаде необходимо провести несколько экспериментов самостоятельно. Для успешного выступления на экспериментальном туре олимпиады Ваше решение должно содержать несколько важных этапов.

Во-первых, необходимо начертить схему экспериментальной установки и построить математическую модель изучаемого процесса или явления. Также нужно указать на существенные и несущественные параметры, построить теоретические зависимости.

Решение экспериментальной задачи – процесс творческий и очень индивидуальный, поэтому в описании эксперимента необходимо подробно описать все Ваши действия так, чтобы члены жюри могли понять, что и как Вы измеряли, какие параметры, при этом, оставались неизменными. Начиная исследование, постарайтесь подобрать метод с наилучшим соотношением «точность-сложность», чтобы успеть его реализовать в отведенное время.

Помните, что таблицы значений должны содержать размерности величин, а количество экспериментальных точек не должно быть меньше 10. Приветствуется попытка расчета или оценка погрешностей.

При построении графиков, необходимо на осях координат подписать величины и единицы измерения, указать единичные отрезки. График должен хорошо читаться и занимать не менее 3/4 координатной плоскости (масштаб!). Не забывайте на миллиметровой бумаге экспериментальные точки указывать с учетом погрешностей.

В выводе необходимо написать о том, как согласуются теоретические расчеты и результаты эксперимента. Если есть расхождения, нужно попытаться объяснить их причины.

Далее в этом пособии некоторые этапы описаны более подробно.

ЗАПИСЬ ЧИСЛЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

Грамотная запись численного результата содержит: численное значение, погрешность, размерность. Конечно, числа, фигурирующие в ответе, должны быть правильно округлены. Простые правила округления:

- погрешность округляется до одной значащей цифры (если эта цифра единица, то следует округлять до двух значащих цифр),
- численное значение результата округляется так, чтобы последний его разряд совпадал с последним разрядом округленной погрешности.

Например, значение резонансной частоты колебательного контура $\nu = 12645 Гц$, ее погрешность $\Delta\nu = 200 Гц$. Правильно записанное значение погрешности с одной значащей цифрой имеет вид $\Delta\nu = 0{,}2 \cdot 10^3 Гц$ (не запрещено $\Delta\nu = 2 \cdot 10^2 Гц$), поэтому запись результата должна быть в виде $\nu = (12{,}6 \pm 0{,}2) \cdot 10^3 Гц$.

Рассчитываем объем спичечного коробка (обратите внимание – используем только средние значения измеренных длин сторон):

$$V = \langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle = 51{,}5 \cdot 36{,}3 \cdot 15{,}2 = 28415{,}64\,мм^3 \approx 28{,}42\,см^3.$$

Это промежуточный результат, поэтому округляем с одной запасной цифрой. Рассчитываем погрешность косвенного измерения

$$\Delta V = V\left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle} + \frac{\Delta b}{\langle b \rangle} + \frac{\Delta c}{\langle c \rangle}\right) = 28{,}42\left(\frac{0{,}94}{51{,}5} + \frac{1{,}1}{36{,}3} + \frac{0{,}94}{15{,}2}\right) = 2{,}02\,см^3$$

Записываем окончательный результат с учетом правил округления:

$V = (28 \pm 2)см^3$. Относительная погрешность полученного результата $\varepsilon = \frac{\Delta V}{V} = \frac{2}{28} \approx 7\%$

ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

Все числа, являющиеся результатами измерений, поэтому арифметические действия над ними должны вестись по правилам действий с приближенными числами. Эти правила изучают в школе на уроках арифметики, они подробно описываются в специальной литературе. Поэтому здесь мы их приведем без доказательств, позволив их себе только проиллюстрировать несколькими примерами.

При сложении (вычитании) двух и более чисел результат округляют так, чтобы последний разряд результата совпадал с последним разрядом наименее точного слагаемого. Примеры:

1) $2 + 2 = 4$; 2) $259 + 12{,}3 = 271$;

3) $6{,}02 \cdot 10^{23} - 5{,}3645 \cdot 10^{15} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$; 4) $100{,}3 - 100 = 0$

Заметим, что с точки зрения действия над приближенными числами операция вычитания является самой неблагополучной - разность двух больших и близких чисел может иметь очень большую относительную погрешность, поэтому, по возможности, таких действий следует избегать.

При умножении (делении) в результате оставляют столько значащих цифр, сколько их в наименее точном сомножителе. Примеры:

1) $2 \times 2 = 4$; 2) $20 \times 2 = 4 \cdot 10^1$;

3) $245 \times 71 = 3{,}5$; 4) $1{,}5643 \cdot 10^{7} / 2{,}3098 \cdot 10^{-3} = 0{,}6772 \cdot 10^{10}$.

При вычислении простейших функций (степенных, тригонометрических, логарифмических, показательных) в результате оставляют столько же значащих цифр, как и у аргумента функции. Это правило является приближенным, при необходимости, в каждом конкретном случае можно разумно оценить погрешность функции, если известна погрешность аргумента. Так при малых относительных погрешностях аргумента можно воспользоваться приближенной формулой $F(x_0 \pm \Delta x) \approx F(x_0) \pm F'(x_0)\Delta x$.

РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Без оценки погрешностей любой экспериментальный результат имеет нулевую ценность. Однако расчеты погрешностей должны разумно дополнять основную работу - проведение измерений и получение окончательного результата.

Погрешность измерений (как и любое иное число, фигурирующее в физике) должна иметь явный смысл. Так, например, записывая длину стола в виде $l = (135 \pm 6) см$, мы ни в коем случае не утверждаем, что длина стола изменяется в пределах от 129 до 141 сантиметра! Смысл погрешности заключается в том, что с некоторой вероятностью (которая называется доверительной) истинное значение длины стола лежит в указанном интервале. Заметьте, не точно лежит в этом интервале, а с некоторой доверительной вероятностью. Иными словами экспериментатор при правильном использовании теории погрешностей оставляет за собой право на ошибку.

Если результат измерения x снимается непосредственно с измерительного прибора, то такое измерение называется прямым. На результат такого измерения влияет множество факторов: посмотрел на стрелку под другим углом, досталась искривленная линейка, рядом с лабораторией проехал трамвай, сама изменяемая величина по некоторым причинам немного изменилась (например, при измерении диаметра шарика длины разных диаметров могут быть различными) и т.д. Все эти факторы приводят к тому, что результаты измерений различаются, наличие такого разброса требует проведения нескольких измерений, результаты которых обозначим $x_1, x_2, \ldots x_N$.

В качестве окончательного результата прямого измерения принимается среднее арифметическое всех измерений $\langle x \rangle = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$ (1)

При прямых измерениях, как правило, учитывают три типа ошибок: приборную, округления, случайную.

Приборная ошибка возникает вследствие несовершенства любого прибора - изготовитель не может (и не обязан) гарантировать абсолютную точность. Поэтому каждый тип прибора имеет гарантированную заводом изготовителем максимальную погрешность. Эти предельные приборные погрешности задается во всевозможных справочниках. Если приборная погрешность не задана в условии задачи (или в описании прибора), то допускается в качестве приборной погрешности использовать половину цены наименьшего деления. Итак, расчет приборной погрешности $\Delta x_{пр.}$ сводится к тому, чтобы вспомнить таблицу, или внимательно посмотреть на шкалу прибора.

В ходе измерений по разным причинам приходится проводить округление результата, в связи с чем, неизбежно появление **ошибки округления** $\Delta x_{окр.}$**.** Величина этой ошибки принимается равной половине интервала округления. Например, если показания амперметра вы округляете до 0,1 А, то погрешность округления принимается равной 0,05А.

Случайная ошибка самым простым способом может быть рассчитана как среднее отклонение величины от его среднего значения $\Delta x_{сл.} = \langle x_k - \langle x \rangle \rangle$.

Полная погрешность прямого измерения (объединяющая все три типа ошибок) имеет вид $\Delta x = \Delta x_{сл.} + \Delta x_{пр.} + \Delta x_{окр.}$

Если одна из ошибок более чем в три раза меньше остальных, то ее можно отбрасывать. В конце концов, если вы измерили три раза и результаты отличаются меньше чем на цену деления, то можете смело в качестве полной погрешности принимать половину цены деления! Если же ситуация противоположная – результаты различных измерений отличаются на несколько делений шкалы, то считайте случайную погрешность и принимайте ее за полную.

Если окончательный экспериментальный результат получается в ходе вычислений над результатами прямых измерений, то такое измерение называется **косвенным.** Так, например, для определения объема шарика можно измерить с помощью штангенциркуля его диаметр (прямое измерение) и затем по известной формуле рассчитать его объем (косвенное измерение). Если же для измерения объема использовать мензурку с водой, то такое измерение объема будет прямым.

В качестве окончательного результата используется значение функции, вычисленное при средних значениях результатов прямых измерений $\langle y \rangle = F(\langle a \rangle, \langle b \rangle ...)$. Результат косвенного измерения вычисляется **один раз!**

Погрешность измерения каждой из величин $a, b...$ вносит некоторую погрешность в расчет величины y, причем величина этой погрешности зависит от вида функции $y = F(a, b...)$. Будем считать, что результаты прямых измерений не зависят друг от друга, тогда можно считать независимыми вклады погрешностей этих величин в результат косвенного измерения.

В таблице приведены значения абсолютной и относительной погрешностей для различного вида функциональных связей величины а, измеренной косвенно, с величинами X, Y и Z, которые измерены непосредственно.

Таблица 1

Абсолютные инструментальные погрешности средств измерений

№ п/п	Средства измерений	Предел измерения	Цена деления	Абсолютная инструментальная погрешность
1	Линейка ученическая чертежная (стальная) демонстрационная	До 50 см До 50 см 20 см 100 см	1 мм 1 мм 1мм 1 см	±1 мм ±1 мм ±0,1 мм ±0,5 см
2	Лента измерительная	150 см	0,5 см	±0,5 см
3	Измерительный цилиндр	До 250 мл	1 мл	±1 мл
4	штангенциркуль	150 мм	0,1 мм	±0,05 мм
5	микрометр	25 мм	0,01 мм	±0,005 мм
6	Динамометр учебный	4 Н	0,1 Н	±0,05 Н
7	Весы учебные	200 г	-	±0,01 г
8	секундомер	0-30 мин	0,2 с	±1 с за 30 мин
9	Барометр- анероид	720-780 мм рт ст.	1 мм рт. ст.	±3 мм рт.ст.
10	Термометр лабораторный	0-1000С	10С	±10С
11	Амперметр школьный	2А	0,1 А	±0,05 А
12	Вольтметр школьный	6В	0,2 В	±0,15 В

Таблица 2

Формулы для нахождения погрешности косвенных измерений

Вид функции	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$a=x+y+z$	$\Delta a=\Delta x+\Delta y+\Delta z$	$\varepsilon=(\Delta x+\Delta y+\Delta z)\ /\ (x+y+z)$
$a=x\text{-}y$	$\Delta a=\Delta x+\Delta y$	$\varepsilon=(\Delta x/x)\ /\ (\Delta y/y)$
$a=xy$	$\Delta a=x\Delta y+y\Delta x$	$\varepsilon=(\Delta x/x)\ +\ (\Delta y/y)$

$a = xyz$	$\Delta a = xy\Delta z + xz\Delta y + yz\Delta x$	$\varepsilon = (\Delta x/x) + (\Delta y/y) + (\Delta z/z)$
$a = x^n$	$\Delta a = nx^{n-1}\Delta x$	$\varepsilon = n\Delta x/x$
$a = x^{1/n}$	$\Delta a = (1/n)x^{(1/n)-1}\Delta x$	$\varepsilon = \Delta x/(nx)$
$a = x/y$	$\Delta a = (x\Delta y + y\Delta x)/y^2$	$\varepsilon = (\Delta x/x) + (\Delta y/y)$
$a = \sin x$	$\Delta a = \Delta x \cos x$	$\varepsilon = \Delta x \operatorname{ctg} x$
$a = \cos x$	$\Delta a = \Delta x \sin x$	$\varepsilon = \Delta x \operatorname{tg} x$
$a = \operatorname{tg} x$	$\Delta a = \Delta x(\cos^2 x)$	$\varepsilon = 2\Delta x/\sin 2x$
$a = \operatorname{ctg} x$	$\Delta a = \Delta x(\sin^2 x)$	$\varepsilon = 2\Delta x/\sin 2x$

Запись результата измерения $A = A_{пр} \pm \Delta A$, $\varepsilon =$......%.

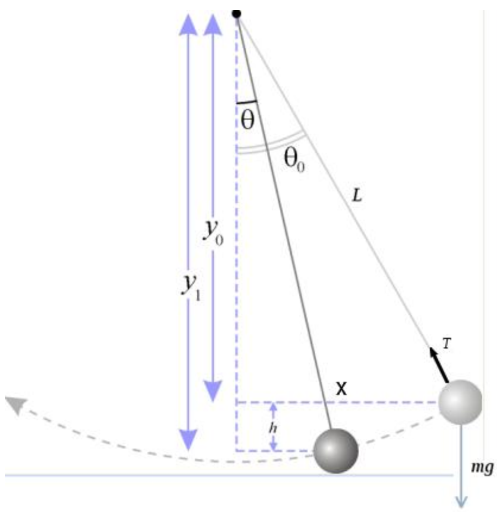
Дальнейшее описание экспериментального исследования проведем на примере исследования колебаний скрепки на нити, закрепленной при помощи двух учебников.

ПРИМЕР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование зависимости периода колебаний скрепки на нити от расстояния между книгами

К сведению
(особенно для 9 и 10 классов):

Математическим маятником называют материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити, прикрепленной к подвесу и находящейся в поле силы тяжести (или иной силы).



Период малых собственных колебаний математического маятника длины L неподвижно подвешенного в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения g равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Период колебаний математического маятника не зависит от амплитуды колебаний ($<< l$) *и массы маятника.*

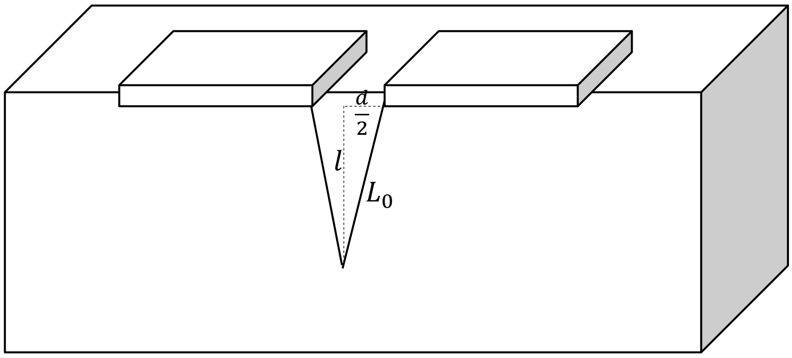
Цель: Исследовать зависимость T(d).

Задачи (план исследования):

1. Разработать математическую модель.
2. Построить теоретическую зависимость $T_{теор}$(d).

3. Провести эксперимент.
4. Построить экспериментальную зависимость $T_{эксп}(d)$.
5. Проанализировать результат: сравнить зависимости, сделать вывод.

Разработка математической модели



Рассмотрев предложенную установку можно предположить, что масса нити существенно меньше массы груза (2 скрепки), поэтому массой (практически нерастяжимой) нити можно пренебречь и рассматривать математический маятник длиной l.

Тогда период колебаний можно рассчитать по формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

По теореме Пифагора $l = \sqrt{L_0^2 - \frac{d^2}{4}}$; $L_0 = 0{,}405\,м$.

Тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L_0^2 - \frac{d^2}{4}}}{g}}$.

Исследование зависимостей между различными варьируемыми переменными, как правило, является основным методом экспериментальных исследований. Поэтому, по возможности, стремитесь проводить такие исследования при выполнении экспериментальных заданий.

1. Выбирайте для исследования тот вид зависимости, который наиболее просто и надежно описан теоретически.
2. Стремитесь провести измерения в максимальном диапазоне варьируемых параметров - полностью используйте возможности вашей экспериментальной установки.
3. Число измерений должно быть достаточно для построения зависимости, даже для построения линейной зависимости необходимо получить 8-10

экспериментальных точек (если, конечно, в условии четко не указано, с каким шагом проводить измерения).

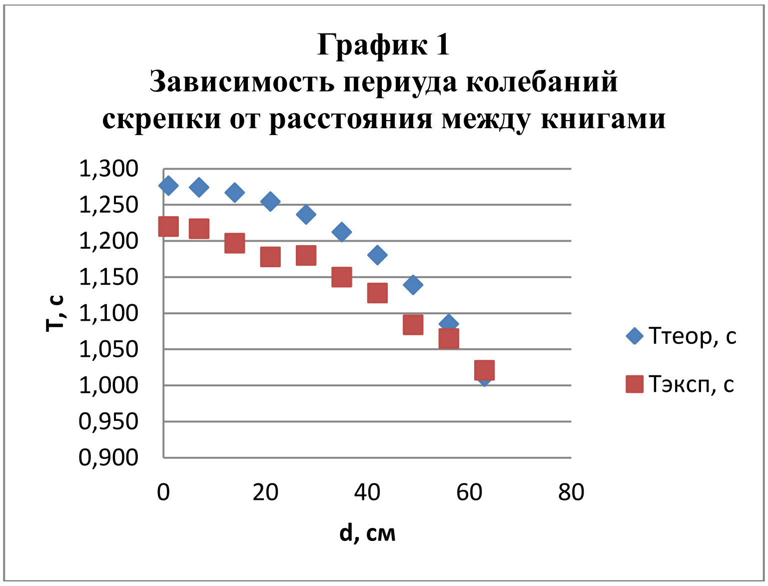
4. Если ваша зависимость имеет какие-либо особенности (максимумы, минимумы, перегибы, точки разрыва и т.д.), в районе этих особенностей «густота» экспериментальных точек должна быть больше.

1 способ

Самым простым вариантом исследования может стать визуальное сравнение теоретической и экспериментальной кривой. Для этого необходимо составить таблицу значений и построить соответствующие графики $T_{теор}(d)$ и $T_{эксп}(d)$.

Таблица 3

№	d, см	$T_т$, с	$T_э$, с
1	1	1,277	1,220
2	7	1,274	1,217
3	14	1,267	1,197
4	21	1,255	1,178
5	28	1,237	1,180
6	35	1,212	1,150
7	42	1,181	1,128
8	49	1,139	1,084
9	56	1,085	1,065
10	63	1,012	1,021



В качестве вывода, можно сказать, что экспериментальная кривая близка к теоретической. Совпадение теоретических и экспериментальных значений наблюдается при большой длине маятника, когда он является математическим.

2 способ

Для более подробного исследования получившейся зависимости, если график похож на $y = x^n$, можно построить зависимость $\sqrt[2]{y}$ от x. Если получилась прямая, то n=2. Если нет, можно построить $\sqrt[3]{y}, \frac{1}{y}, \frac{1}{y^2}$ от x … Так, подбирая степень, можно получить прямую и найти n.

3 способ

Для того чтобы без подбора интерполировать (приблизить) экспериментальную зависимость к степенной функции вида $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^{\mathrm{n}}$, необходимо построить зависимость $\ln \mathrm{Y}(\ln \mathrm{X})$, где тангенс угла наклона графика и будет равен показателю степени $\mathrm{n} = \mathrm{tg}(\alpha)$.

Не стоит бояться этих «страшных» функций, достаточно найти их на клавиатуре калькулятора («Ln» или «Lg») и пополнить таблицу двумя столбцами.

4 способ

Наиболее просто обрабатываются линейные зависимости - даже «на глаз» легко отличить прямую от «кривой». Поэтому даже в том случае, если ваша зависимость нелинейная, постарайтесь соответствующим преобразованием переменных привести ее к линейному виду.

Пусть в рамках своих теоретических построений вы пришли к выводу, что некоторые физические величины связаны функциональной зависимостью $y = F(x)$, причем эта функция содержит набор постоянных параметров $p, q...$, либо подлежащих определению, либо просто неизвестных (следовательно, вид зависимости следует записать в более общем виде $y = F(x, p, q...)$. Практически всегда можно найти такие преобразования к новым переменным Y и X, так что зависимость между ними линейна $Y=aX+b$.

Функция $T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L_0^2 - \frac{d^2}{4}}}{g}}$ достаточно сложна для исследования. Попробуем ее привести к линейной зависимости. После возведения обеих частей равенства в четвертую степень получаем следующую зависимость: $\boldsymbol{T^4} = 16\frac{\pi^4}{g^2}L_0^2 - 16\frac{\pi^4}{4g^2}\boldsymbol{d^2}$.

Полученную зависимость можно свести к линейной Y=$\boldsymbol{a}X$+$\boldsymbol{b}$, произведя замену переменных $\boldsymbol{Y = T^4}$; $\boldsymbol{X = d^2}$, и введя коэффициенты

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{16\pi^4 L_0^2}}{\boldsymbol{g^2}} = 2{,}62\ c^4; \qquad \boldsymbol{a} = -\frac{\boldsymbol{4\pi^4}}{\boldsymbol{g^2}}\boldsymbol{10^{-4}} = -4\cdot 10^{-4}\,\frac{c^4}{см^2}.$$

Таблица 4

№	d, см	Тт, с	Тэ, с	X*10^{-4}, м^2	Yт, с^4	Yэ, с^4
1	1	1,277	1,220	1,00	2,62	2,22
2	7	1,274	1,217	49,00	2,60	2,19
3	14	1,267	1,197	196,00	2,54	2,05
4	21	1,255	1,178	441,00	2,44	1,93
5	28	1,237	1,180	784,00	2,31	1,94
6	35	1,212	1,150	1225,00	2,13	1,75
7	42	1,181	1,128	1764,00	1,91	1,62
8	49	1,139	1,084	2401,00	1,66	1,38
9	56	1,085	1,065	3136,00	1,37	1,29
10	63	1,012	1,021	3969,00	1,03	1,09

Следующий шаг - построение графика:

1. Выбираем кусок листа миллиметровой бумаги, размеры которого не меньше, чем половина стандартного тетрадного листа (иначе ваши экспериментальные точки трудно будет найти);
2. Рисуем оси координат, подписываем их и размечаем (не обязательно каждую ось начинать с нуля, масштаб подбирают так, чтобы график занимал большую часть отведенного ему места, а не шел параллельно одной из осей);
3. Наносим экспериментальные точки, каждую из них помечаем (например, обводим кружком), при возможности отмечаем размер погрешности измерений в виде вертикального отрезка прямой;
4. Проводим линию зависимости, которая, по вашему мнению, отражает ход полученной зависимости; если это должна быть прямая, то и рисуйте ее прямой; совсем не обязательно, чтобы линия проходила через все экспериментальные точки - они же известны с некоторой погрешностью.

Воспользуемся графиком 2, чтобы продемонстрировать порядок обработки результатов, целью которого является оценка параметров зависимости и их погрешностей.

Так можно очень быстро провести определение параметров зависимости «на глаз». Для этого следует провести прямую, которая «ближе всего» лежит к экспериментальным точкам (на нашем рисунке это жирная линия). Чтобы ее построить, нужно выбрать «центр масс» имеющихся экспериментальных точек (приближенно ее координаты равны средним между крайними значениями соответствующих координат), на рисунке это точка С; через эту точку проведите прямую так, чтобы по разные стороны от нее лежало примерно одинаковое число экспериментальных точек. Сразу же определите приближенные значения параметров зависимости:

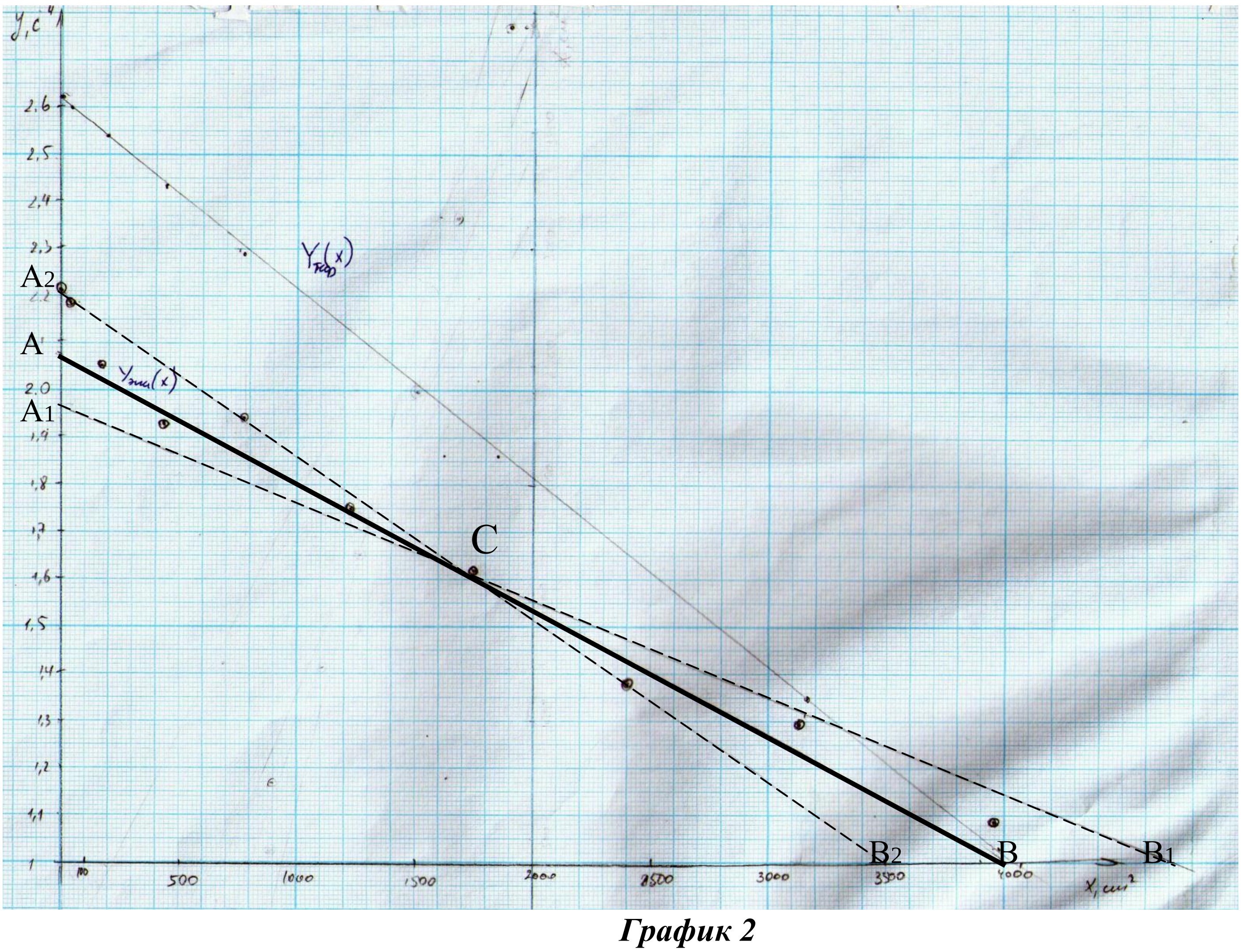


График 2

- величина *b* есть величина отрезка AO (на рисунке b≈2,08 c^4);

- коэффициент *a* равен отношению $a \approx \dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$, причем величину ΔX можно выбрать произвольно (но не слишком малой), так чтобы можно было вычислить отношение «в уме» (на рисунке $\Delta X = 4000$, $\Delta Y \approx 2{,}08$, поэтому $a \approx \frac{\Delta Y}{\Delta X} \approx 5{,}2 \cdot 10^{-4}$).

Для оценки погрешностей параметров зависимости нужно провести две «граничные» прямые (примерные): обе проходят через «центр масс», а область между прямыми должна захватывать большинство экспериментальных точек (ближайшие к центру точки могут выходить за выделяемую область). На нашем рисунке эти прямые обозначены пунктиром. Так же как и для основной прямой, для этих прямых можно определить параметры, которые и будут являться нижними и верхними границами величин a,b. Тогда $\Delta a \approx \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2}$, $\Delta b \approx \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2}$.

Вывод:

1. Экспериментальная зависимость линейна также как и теоретическая.
2. Коэффициенты линейной функции в экспериментальной зависимости имеют тот же порядок, что и в теоретической, что, в некоторой степени, оправдывает выбранную модель.
3. Результаты графического анализа коэффициентов близки к теоретическим.
4. Можно считать, что данная модель недостаточно точно описывает данный процесс.
5. Основной причиной несогласованности теории с практикой является то, амплитуда колебаний была соизмерима с длиной маятника, нить растяжима, что не соответствует определению математического маятника.

Для получения максимально достоверных результатов разработано множество серьезных методов обработки экспериментальных данных. Самым популярным из них является **метод наименьших квадратов(МНК)**.

Цель этого метода - получить наилучшие оценки параметров известной зависимости по экспериментальным данным, содержащим оценки измерений. Мы не в состоянии рассказать о разновидностях МНК и, тем более об его строгом обосновании, поэтому ограничимся механическим набором действий, необходимых для применения МНК в анализе линейной зависимости $Y = aX + b$.

Метод наименьших квадратов позволяет достаточно точно рассчитать коэффициенты *a* и *b*, а также их погрешности в уравнении $Y = aX + b$. Для его реализации необходимо сделать некоторые промежуточные подсчеты: $< X >$, $< Y >$, $< X^2 >$, $< Y^2 >$, $< XY >$.

Технически это можно реализовать, заполнив таблицу:

№	X, м	Y, кг	X^2, $м^2$	Y^2, $кг^2$	XY, м·кг
1					
…					
10					
	< X >	< Y >	$< X^2 >$	$< Y^2 >$	< XY >

Затем предстоит рассчитать некоторые величины, которые хоть и имеют непонятные названия, но достаточно просты в расчетах: **дисперсии** ($S_X^2 =< X^2 > - < X >^2$, $S_Y^2 =< Y^2 > - < Y >^2$ – средний квадрат минус квадрат среднего), **коэффициент ковариации** ($R_{XY} =< XY > - < X >< Y >$ - среднее произведение минус произведение средних), **значения коэффициентов** ($a = \frac{R_{XY}}{S_X^2}$; $b =< Y > -a < X >$), **абсолютная погрешность коэффициентов в линейной функции** ($\Delta a = 2\sqrt{\frac{1}{N-2}(\frac{S_Y^2}{S_X^2} - a^2)}$;

$\Delta b = \Delta a\sqrt{S_X^2 + <X>^2}$).

- ✓ *Если* $\Delta b > |b|$ *– обоснование прямой пропорциональности Y=**a**X (b=0).*
- ✓ *Если под* $\sqrt{<0}$*, то от округления, когда точки близко к прямой.*

Коэффициент корелляции (близость точек к линейной зависимости)

$r = \frac{R_{XY}}{\sqrt{S_X^2 S_Y^2}}$;$r \in [-1:1]$, точки ложатся на прямую при $r \to \mp 1$.

5 способ

После приведения функции $T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L_0^2 - \frac{d^2}{4}}}{g}}$, как и в четвертом способе, к линейному виду (линеаризации) $Y = aX + b$, применим метод наименьших квадратов:

№	d, см	Тт, с	Тэ, с	X*10^{-4}, м^2	Yт, с^4	Yэ, с^4	X^2*10^{-8}, м^4	Y^2, с^8	XY*10^{-4}, м^{2}с^4
1	1	1,277	1,220	1,00	2,62	2,22	1,00	6,86	2,62
2	7	1,274	1,217	49,00	2,60	2,19	2401,00	6,76	127,42
3	14	1,267	1,197	196,00	2,54	2,05	38416,00	6,46	498,15
4	21	1,255	1,178	441,00	2,44	1,93	194481,00	5,97	1077,63
5	28	1,237	1,180	784,00	2,31	1,94	614656,00	5,32	1808,22
6	35	1,212	1,150	1225,00	2,13	1,75	1500625,00	4,54	2609,25
7	42	1,181	1,128	1764,00	1,91	1,62	3111696,00	3,66	3377,00
8	49	1,139	1,084	2401,00	1,66	1,38	5764801,00	2,75	3984,70
9	56	1,085	1,065	3136,00	1,37	1,29	9834496,00	1,86	4282,52
10	63	1,012	1,021	3969,00	1,03	1,09	15752961,00	1,07	4097,60
ср.				1396,60 $<X>$	2,06	1,74 $<Y>$	3681453,40 $<X^2>$	4,53 $<Y^2>$	2186,51 $<XY>$

Расчет квадратов средних величин:

$<X>^2 = 1950491{,}56;\ <Y>^2 = 3{,}04.$

Расчет дисперсий:

(средний квадрат минус квадрат среднего)

$\boldsymbol{S_X^2} = <X^2> - <X>^2$=1730961,84,

$\boldsymbol{S_Y^2} = <Y^2> - <Y>^2 = 1{,}48.$

Коэффициент ковариации

(среднее произведение минус произведение средних)

$\boldsymbol{R_{XY}} = <XY> - <X><Y>$=-250,30

Значения коэффициентов:

$\boldsymbol{a} = \frac{R_{XY}}{S_X^2} = -1{,}44 \cdot 10^{-4}(\frac{c^4}{м^2});$

$$\boldsymbol{b} = < Y > - \boldsymbol{a} < X > = 1{,}94(c^4)$$

Абсолютная погрешность коэффициентов в линейной функции:

$$\Delta\boldsymbol{a} = 2\sqrt{\frac{1}{N-2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} - a^2\right)}; \qquad \Delta\boldsymbol{a} = 0{,}18 \cdot 10^{-4}\,\frac{c^4}{м^2};$$

$$\Delta\boldsymbol{b} = \Delta a\sqrt{S_X^2 + < X >^2}; \qquad \Delta\boldsymbol{b} = 2{,}8c^4$$

$\Delta b > |b|$ *, значит Y=**a**X (b=0).*

Коэффициент корелляции (близость точек к линейной зависимости)

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{R_{XY}}}{\sqrt{\mathrm{S_X^2 S_Y^2}}} = -0{,}16$$

Вывод:

1. Экспериментальная зависимость линейна также как и теоретическая.
2. Коэффициенты линейной функции в экспериментальной зависимости имеют тот же порядок, что и в теоретической, что, в некоторой степени, оправдывает выбранную модель.
3. Результаты предварительного графического анализа коэффициентов и их погрешностей согласуются с результатами МНК.
4. Значение коэффициента корелляции r =-0,16 далеко от -1, что говорит о том, что экспериментальные точки не достаточно точно ложатся на прямую.
5. Можно считать, что данная модель недостаточно точно описывает данный процесс.
6. Основной причиной несогласованности теории с практикой является то, амплитуда колебаний была соизмерима с длиной маятника, нить растяжима, что не соответствует определению математического маятника.

Литература

1. Слободянюк, А.И. Физика. Экспериментальные задачи в школе: пособие для учителей общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения. –Минск. Аверсев, - 2011.- 397 с.: ил.